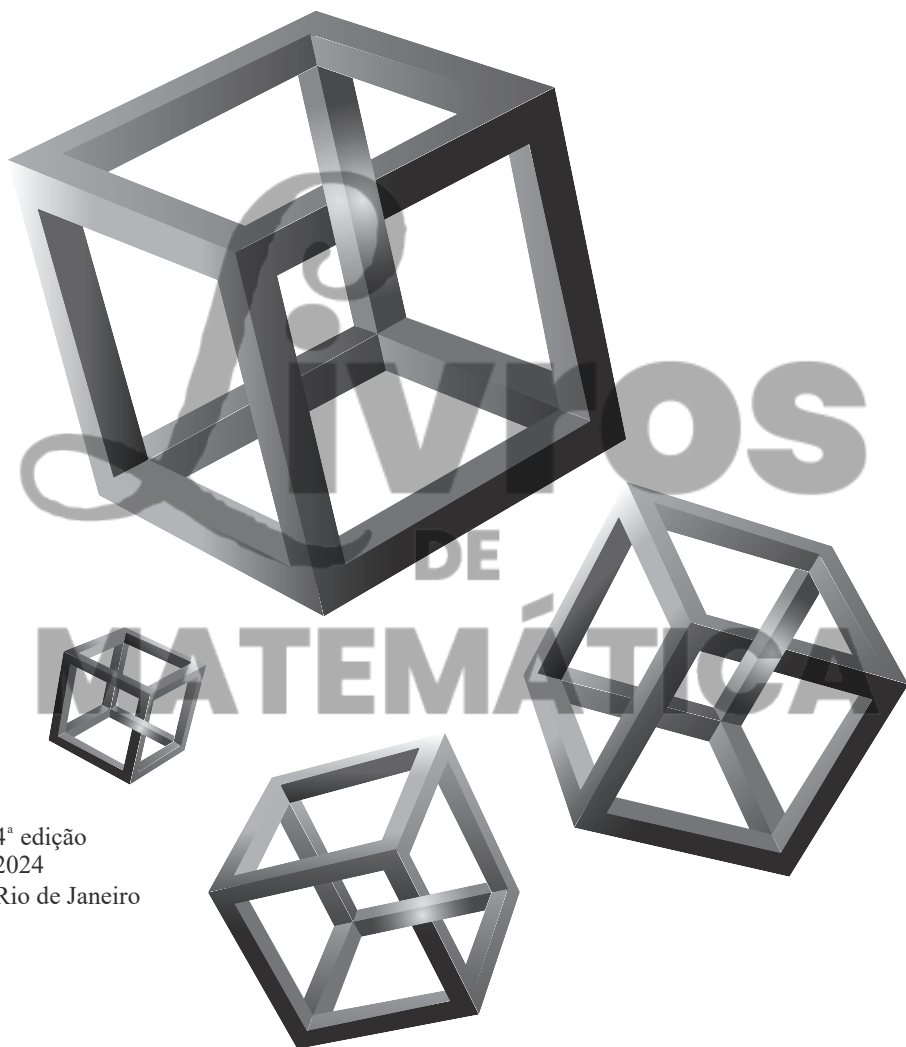


Um Convite à Matemática

com técnicas de demonstração e notas históricas

Daniel Cordeiro de Moraes Filho



4ª edição
2024
Rio de Janeiro



COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Sumário

Prefácio	xi
1 As notações matemáticas	1
1.1 Para que servem as notações matemáticas?	2
1.2 Algumas notações mais utilizadas	4
1.3 Alguns fatos sobre as notações	7
1.4 *Uma viagem pelas notações do passado	17
2 Como se expressa um fato matemático: um pouco de Lógica	23
2.1 Sentenças, sentenças abertas e quantificadores	23
2.2 Conectivos e proposições compostas (O Cálculo Proposicional)	39
3 Mais um pouco de Lógica Matemática	47
3.1 Tabelas-verdade	47
3.2 Sentenças equivalentes na Lógica Formal	49
3.3 Argumentos	54
4 Sentenças condicionais e implicativas. Condições necessárias e suficientes	59
4.1 Sentenças condicionais	59
4.2 Sentenças implicativas	63
4.3 Sentenças condicionais, implicativas e a linguagem de conjuntos	64
4.4 *Curiosidade: a verdade das premissas	68
4.5 Duas notações que se costumam confundir	69
4.6 Condição necessária e condição suficiente	72
5 Se vale a ida, vale a volta? A recíproca de uma sentença	77
5.1 A recíproca de uma sentença	77
5.2 Sentenças equivalentes	80

5.3	Um exemplo de como usar a recíproca de uma sentença	83
5.4	**A bicondicional	87
6	Desvendando os teoremas - Parte I	89
6.1	O que é um teorema? (Hipótese e tese)	89
7	Desvendando os teoremas - Parte II	101
7.1	Mais tipos de teorema	101
7.2	A generalização de um teorema	104
7.3	A família dos teoremas	108
8	Desvendando as definições matemáticas	115
8.1	O que é uma definição matemática?	115
9	Modelos axiomáticos. Convenções matemáticas	131
9.1	Noções primitivas e axiomas	131
9.2	O modelo axiomático	134
9.3	Convenções matemáticas	148
10	Conjecturas e contraexemplos	153
10.1	Conjecturas e contraexemplos	153
11	Desvendando as demonstrações	163
11.1	O que é uma demonstração? (O raciocínio dedutivo)	163
11.2	Exemplo motivador da estrutura lógica de uma demonstração	165
11.3	Definição de demonstração	167
12	*Estratégias para demonstrar um resultado matemático	175
12.1	A redação de uma demonstração	177
12.2	O que fazer para demonstrar um teorema?	178
12.3	Pausa para uma observação pertinente	180
13	Técnicas de demonstração	181
13.1	Introdução	181
13.2	As técnicas mais simples de demonstração	182
13.3	Demonstrações utilizando a forma de representar um número	185
14	Quando é necessário saber negar (aprendendo a negar na Matemática)	193
14.1	Negação de sentenças envolvendo quantificadores	194
14.2	A negação de uma sentença condicional	197
14.3	Resumo da negação de sentenças	198
14.4	Método para negar sentenças com mais de um quantificador	200

15 Um pouco mais de Lógica. As demonstrações por casos	207
15.1 *Tautologias	207
15.2 Absurdos, contradições	208
15.3 **Tabelas-resumo das Leis do Cálculo Proposicional	209
15.4 Demonstração de teoremas com hipóteses e teses especiais	211
16 O absurdo tem seu valor! As demonstrações por redução a um absurdo	217
16.2 Redução a um absurdo	218
16.3 Demonstração direta <i>versus</i> demonstração por contradição	225
16.4 Quando usar a demonstração direta e quando usar a indireta?	226
17 Mais duas técnicas de demonstração	239
17.1 Não perca a tese de vista. A técnica “de trás para frente”	239
17.2 Uma outra técnica para demonstrar $H \Rightarrow (T_1 \text{ ou } T_2)$	242
18 Absurdo, resultados de existência, de unicidade	245
18.1 Demonstrações construtivas. O absurdo e os resultados de existência	245
18.2 Demonstração por absurdo para demonstrar resultados de unicidade	248
18.3 Redução ao absurdo e as demonstrações gratuitas	249
19 Demonstrações usando a contrapositiva	251
19.1 A contrapositiva de uma sentença	251
19.2 Redução a um absurdo <i>versus</i> demonstração usando a contrapositiva	254
20 Demonstrações em um modelo axiomático: um pouco de abstração	259
20.1 Trabalhando com demonstrações em um modelo axiomático	259
21 Demonstrações com o auxílio de figuras	271
22 Demonstrações por Indução. O método indutivo e o método dedutivo	279
22.2 Princípio de Indução: o infinito dominado!	280
22.3 *Raciocínio indutivo, generalizações	290
23 Sofismas, o cuidado com os autoenganos e com os enganadores!	293
23.1 *Sofismas	293
24 Resumo e tabela-resumo das técnicas de demonstração	303
24.1 Resumo das técnicas de demonstração	303
24.2 Tabela-resumo das técnicas de demonstração	305

25 *Textos complementares de leitura	307
25.1 Conjecturas e problemas em aberto mais socialmente famosos	307
25.2 Alguns problemas em aberto de fácil entendimento	315
25.3 Outros problemas em aberto	320
25.4 Algumas cômicas demonstrações	322
26 Respostas e sugestões para os exercícios	325
Referências Bibliográficas	367
Índice Remissivo	373



Livros
DE
MATEMÁTICA

Prefácio

A ideia que nos fez escrever este livro foi a de preencher a lacuna de um texto que apresentasse os fundamentos básicos da Lógica Matemática, usando a própria Matemática. Visávamos um livro que pudesse ser usado por professores e alunos do Ensino Básico, particularmente, alunos envolvidos em olimpíadas de Matemática, estudantes dos cursos de Matemática e demais interessados.

É justamente quando precisam ou ingressam na universidade que a maioria de nossos alunos se chocam ao se deparar com o formalismo e a abstração que requerem algumas das primeiras disciplinas de Matemática. O choque decorre, principalmente, de carências na formação dos alunos, de seus professores e de um Ensino Médio que, na maioria das vezes, não lhes fornece um preparo adequado e nem lhes treina para usar o raciocínio lógico dedutivo que posteriormente lhes será cobrado. Juntam-se a esse danoso fato alguns livros didáticos que trazem erros conceituais, a exemplo de não distinguir definições de demonstrações, além de provar fatos matemáticos com exemplos, fazer mal uso de notações, dentre outros disparates.

No âmbito das universidades, ainda temos o fracasso de certas disciplinas introdutórias de Lógica e de Fundamentos da Matemática, que deixam de ensinar como a Matemática realmente funciona, acabam se tornando improdutivas e não conseguem corrigir falhas do raciocínio lógico dos alunos ([42]) nem lhes preparar adequadamente para o Magistério ou para disciplinas mais adiantadas.

É necessário despertar nos professores do Ensino Básico e em nossos jovens alunos o espírito crítico, o raciocínio correto e o cuidado com a linguagem, para que repassem esses conhecimentos às próximas gerações e possamos, com isso, melhorar o ensino nesse aspecto.

Nosso objetivo neste livro é que, em curto intervalo de tempo, os leitores possam compreender como a Matemática funciona, como as ideias da Matemática surgem e se desenvolvem; que possam, também, aprender as principais técnicas de demonstração e comecem desde cedo a dar atenção ao mínimo de rigor que a Matemática demanda, aprendendo a se comunicar com uma linguagem clara, precisa e fundamentada na Lógica. Cremos que, quanto mais cedo um estudante puder ter acesso a esses conhecimentos, mais facilmente aprenderá vários outros tópicos que irão aparecer ao longo de sua formação.

Tivemos a intenção de escrever o livro com uma linguagem cativante e leve. Trabalhamos com diversos casos reais de erros e dificuldades em relação ao ensino e à aprendizagem de Matemática, que alunos e professores encontram em livros didáticos e que enfrentam nas salas de aula e em seus cotidianos. Também objetivamos despertar a curiosidade dos leitores para vários tópicos que julgamos interessantes, tanto da Matemática como de sua história.

Para ler o livro, são necessários, basicamente, conhecimentos matemáticos do Ensino Básico, principalmente os da Teoria Elementar dos Números e os da Geometria Plana.

O texto destina-se a ser usado em disciplinas iniciais de Fundamentos de Matemática, de Lógica Matemática (elementar), de Resolução de problemas, em cursos de preparação para Olimpíadas de Matemática, de aperfeiçoamento para professores dos Ensino Fundamental e Médio e em outros cursos de natureza semelhante.

Aos leitores, ressaltamos os seguintes fatos:

- Para explicitar que estamos fazendo uma definição, as palavras que denominam um objeto serão grifadas em fonte negrito.
- As palavras estrangeiras estão escritas em itálico. Visando um melhor entendimento do texto, sentenças matemáticas e algumas palavras também estão em itálico.
- Para dar o mínimo de formalismo e manter nossa proposta, tivemos de explorar noções intuitivas que os leitores certamente possuíam de certos temas e, por vezes, fomos impelidos a fazer uma introdução ingênua de outros. Mas, no momento oportuno, esses temas foram devidamente formalizados e detalhados.

- Algumas referências, mesmo não citadas nos capítulos, são sugestões para consultas posteriores e constam na Referência Bibliográfica.
- Os exercícios se propõem contemplar os mais diversos casos em que possam se apresentar os temas estudados.
- Algumas citações usadas no começo dos capítulos foram tiradas do Mathematical Quotation Server, na página eletrônica

<http://math.furman.edu/~mwoodard/mquot.html>

(consultada em outubro de 2023) e traduzidas livremente para o Português pelo autor.

A leitura do artigo [55] talvez tenha sido uma de nossas primeiras motivações para escrever este livro. A Revista do Professor de Matemática (RPM) e a coleção [47], ambos editados pela Sociedade Brasileira de Matemática, foram, além de inspiração, razão de vários temas abordados ao longo do texto. Utilizamos a última referência como fonte para criar vários exercícios baseados em fatos reais, com o intuito de desenvolver o senso crítico dos leitores em relação aos livros didáticos e à maneira como esses livros abordam certos tópicos de Matemática.

Agradecemos aos seguintes colegas por sugestões e correções: Ângelo Roncalli, Antônio Brandão, Claudianor Oliveira Alves, Daniel Pellegrino, Francisco Júlio de Araújo Corrêa, Lúcio Guerra, Marcelo Martins dos Santos, José Iraponil Costa Lima, Samuel Duarte, Sinval Braga, Tomás Edson Barros, Vandik Estevam e Alan de Araújo Guimarães. Agradeço ao professor José Lindomberg Possiano Barreiro pela ajuda com o \LaTeX e pela confecção das figuras. Agradeço ainda, profundamente, a um parecerista anônimo pela leitura técnica e por suas valiosas opiniões para melhorar o texto.

Sugestões para leitura e uso do livro:

1. A proposta é que se estude mais rapidamente os capítulos iniciais, objetivando chegar logo ao Capítulo 11, quando começa o estudo das demonstrações matemáticas.
2. Os capítulos, seções ou subseções marcados com um asterisco (*) podem ser suprimidas em uma primeira leitura, sem que se altere a proposta principal do livro. Esses tópicos podem ficar para leitura individual complementar

ou para serem apresentados pelos próprios alunos, como algum trabalho da disciplina na qual o livro esteja sendo usado. Essa sugestão não significa que esses tópicos não sejam importantes na formação dos alunos!

3. Os capítulos, seções ou subseções marcados com dois asteriscos (**) abordam tópicos essencialmente de Lógica e podem também, com o devido cuidado, ser omitidos para um uso mais rápido do livro.

Contamos que nos enviem sugestões, nos apontem falhas e erros para que possamos melhorar nosso texto. Usem o endereço: demoraisfilho@gmail.com

Campina Grande, março do ano de 2012

Prefácio da quarta edição

Esta quarta edição foi revisada e atualizada. Também aproveitamos para fazer pequenas modificações.

Mais uma vez, agradecemos a acolhida que o livro tem entre nossos colegas, professores, alunos e interessados.

Fraterno abraço a todos.

Campina Grande, outubro do ano de 2023

Daniel Cordeiro de Morais Filho

MATEMÁTICA

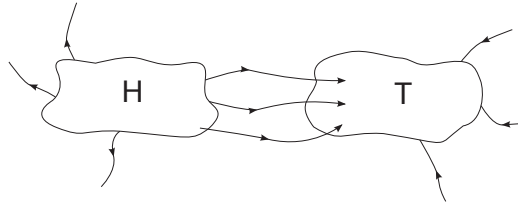


Figura 17.1: Em muitos casos, não se deve perder a tese T de vista para conseguir descobrir a demonstração. Se a demonstração for encarada como uma ponte ligando hipótese à tese, nada impede de usar a tese e raciocinar um pouco “de trás para frente” para tentar descobrir como construir essa ponte. Claro, poderá haver algumas tentativas infrutíferas, mas essa ponte deve ser construída. Não se deve desistir!

Vamos a um exemplo. Demonstramos o seguinte teorema

Teorema 17.1.1. *Se x e y são números reais positivos, então $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.*

(Hipótese: x e y são números reais positivos

Tese: $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$)

Nesse teorema temos uma hipótese muito geral, x e y são números reais positivos, e desejamos deduzir uma desigualdade. Como fazer isso partindo apenas dessa hipótese? E agora?

Bem, nesse caso, a tese tem um papel muito importante na descoberta da demonstração. Vejamos.

Primeiramente, é claro que não se pode usar diretamente a tese em uma demonstração, pois é justamente ela que queremos deduzir. Mas sem perder a tese de vista, não poderíamos chegar a alguma expressão conhecida válida, e daí ir em sentido contrário e usar essa expressão para deduzir a tese?

Pois bem, examinando a tese temos:

$$\begin{aligned} \sqrt{xy} \stackrel{?}{\leq} \frac{x+y}{2} &\Rightarrow (\sqrt{xy})^2 \stackrel{?}{\leq} \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow xy \stackrel{?}{\leq} \frac{x^2 + 2xy + y^2}{4} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 4xy \stackrel{?}{\leq} x^2 + 2xy + y^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 \leq x^2 - 2xy + y^2 \Rightarrow 0 \stackrel{!}{\leq} (x-y)^2. \end{aligned}$$

Usamos as interrogações em cima do símbolo de desigualdade, pois não sabemos se elas são válidas. Mas, observe que ao final deduzimos a expressão $(x - y)^2 \geq 0$, que sabemos ser verdadeira, pois o quadrado de qualquer número é não negativo.

Agora, será que os passos anteriores não podem ser revertidos, ou seja, as implicações anteriores valem em sentido contrário? Se valerem, como dessa vez estamos partindo de uma desigualdade válida, provaremos o que queremos.

De fato, as implicações valem em sentido contrário (nesse caso, no sentido direto também). Temos a

Demonstração do Teorema 17.1.1: Sejam x e y números reais. Como $(x - y)^2 \geq 0$, temos as implicações:

$$\begin{aligned} (x - y)^2 \geq 0 &\Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{x^2 + 2xy + y^2}{4} \geq xy \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{x + y}{2}\right)^2 \geq xy. \end{aligned}$$

Como x e y são números positivos, temos $xy = (\sqrt{xy})^2$ e da última desigualdade resulta

$$\left(\frac{x + y}{2}\right)^2 \geq (\sqrt{xy})^2 \Rightarrow \frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}. \text{ C.Q.D.}$$

Observações:

1. Não se pode usar a tese diretamente em uma demonstração! Não pode haver dúvidas sobre isso!

Note que, informalmente, como em um rascunho, sem perder a tese de vista, apenas encontramos uma desigualdade válida, e voltando nas implicações a partir dessa desigualdade válida é que a tese foi deduzida.

2. Nesse método de demonstração, observe com o devido cuidado se realmente as implicações valem em sentido contrário.

19 | Demonstrações usando a contrapositiva

“Euclides me ensinou que sem hipóteses não há qualquer demonstração. Portanto, em qualquer argumento, examine as hipóteses.”

Eric Temple Bell (1883-1960)

In Return to Mathematical Circles, H. Eves, Prindle, Weber & Schmidt, 1988.

19.1 A contrapositiva de uma sentença

Olhando mais atentamente a demonstração do Lema 16.2.1, naquela demonstração provamos a sentença *Se n é ímpar, então n^2 é ímpar* e, com argumentos da técnica da demonstração por redução a um absurdo, a usamos para provar o que queríamos: *Se n^2 é par, então n é par*.

Portanto, na verdade, escrevendo essas sentenças na forma implicativa, provamos naquela demonstração a seguinte implicação:

$$(n \text{ é ímpar} \Rightarrow n^2 \text{ é ímpar}) \Rightarrow (n^2 \text{ é par} \Rightarrow n \text{ é par}). \quad (19.1)$$

Se chamarmos as proposições

$$H: n^2 \text{ é par} \quad \text{e} \quad T: n \text{ é par},$$

as negações dessas sentenças são, respectivamente,

$$\sim H: n^2 \text{ é ímpar} \quad \text{e} \quad \sim T: n \text{ é ímpar}.$$

Índice Remissivo

- e*, número, 6
- Alfabeto grego, 7
- Argumentos, 54
 não válidos, 55
 válidos, 55
- Aristóteles, 57, 110, 224
- Arquimedes de Siracusa, 76, 96, 97
 eureka 97
- Axiomas, 133, 168
 diferença entre postulados *e*, 134
 que aparecem nos *Elementos* de Euclides, 133
- Bernoulli, Jacques, 280
 desigualdade de, 280
- Bicondicional, 87
- Bombelli, Rafael, 17
- Bonaparte, Napoleão, 98
 teorema de, 99
- C.Q.D., 180
- Cayley, Arthur, 308
- Condição
 necessária, 72
 suficiente, 72
 necessária, mas não suficiente, 78
- suficiente, mas não necessária, 78
- Conectivos, 40
 e, 41
 não, 194
 ou, 41
 se..., então, 59
- Conjecturas, 99, 153, 156
 de Beal, 321
 de Goldbach, 156
 dinheiro para quem resolver, 99
 já resolvidas, 307
- Conjunto vazio
 a perfeição do, 159
 aplicação à Lógica, 160
 definição de, 70
- Conjuntos
 complementar de, 196
 interseção de, 39
 união de, 39
- Contraexemplos, 155
- Convenções matemáticas, 148
- Criptografia, 314
- Cálculo
 sentencial ou proposicional, 41
- da Vinci, Leonardo, 58, 98

- De Morgan, Augustus, 308
leis da lógica, 195
- Definições matemáticas, 115, 168
como entender a conjunção *se* das, 117
definições *versus* teoremas, 125
equivalentes, 126
evitar círculos viciosos nas —, 118
o uso do *se e somente se* nas —, 117
observações sobre, 116
recursivas (ou indutivas), 285
uma boa —, 126
- Demonstrações matemáticas, 61, 90, 163, 167
atitude de alguns professores e autores quanto às, 171
classificação das, 181
com o auxílio de figuras, 271
comentários sobre as, 170
comparação entre os métodos por absurdo e usando a contrapositiva, 254
construtivas, 246
definição, 168
direta *versus* por contradição, 225
diretamente em um modelo axiomático, 259
diretas, 182
estratégias para fazer, 175
estão desaparecendo das salas de aula, 170
exemplo motivador da definição de, 165
existência de infinitos números primos, 289
feitas por um computador, 308
indiretas, 220
justificativa lógica das — por redução a um absurdo, 220
quando o método direto ou o indireto, 226
questionário-roteiro para fazer, 178
redação de, 177
reductio ad absurdum, 218
redução a um absurdo, 218
resultados de unicidade, 248
resumo das técnicas de, 303
usando a contrapositiva, 252
usando a forma de representar um número, 185
usando contraexemplo, 157
- Descartes, René, 21, 153, 309, 319
- Diofanto de alexandria, 311
- Divisão de um circunf. em partes iguais, 313
- Einstein, Albert, 153, 314
- Euclides de Alexandria, 138, 265, 289, 317
os *Elementos* de, 96, 138, 146
- Eudoxo de Cnido, 111
- Euler, Leonhard, 6, 20, 154, 162, 309, 317, 319
conjectura falsa proposta por, 309
- Expressões
impossíveis, 11
indeterminadas, 11
- Falácias, 293
- Fermat, Pierre de, 21, 309, 310, 319
números de, 309
números primos de, 309

- o último teorema de, 170, 229, 310, 312
- Fibonacci, 298
- Fourier, Joseph, 98
- Gauss, C.F., 313
- Germain, Sophie, 311, 312
- Goldbach, Christian, 162
 - conjectura de, 156, 316
- Grafos
 - Teoria dos, 309
- Igualdade
 - como surgiu o símbolo de, 19
 - uso da, 69
- Infinito, 6
 - como representar o, 10
- Lagrange, Louis, 98, 255
- Lambert, Johann, 230
- Lei
 - dos cossenos, 96, 106, 250
 - dos senos, 96
- Linguagem
 - de conjuntos e a Lógica, 30, 64, 256
 - matemática, 1
 - simbólica, 1
- Lógica
 - a Linguagem de Conjuntos e a, 30
 - bivalente, 25
 - formal, 41
- Matemática
 - famosos e apaixonados por, 98
- Mersenne, 319
- Mersenne, Marin, 317
- Método
 - indutivo, 290
 - dedutivo, 61, 171
 - indutivo, 279
- Modelo axiomático, 131, 134, 168
 - consistente, 136
 - da Geometria Euclidiana, 136
 - definição de, 136
 - em outras áreas, 147
 - inconsistente, 136
 - nos séculos XIX e XX, 138
- Monge, Gaspar, 98
- Napier, John, 6
- Newton, Isaac, 13
 - o *Principia* de, 147
- Noções
 - comuns, 132
 - primitivas, 132
- Notações, 2
 - as mais utilizadas, 4
 - do passado, 17
 - fatos sobre o uso das, 8
 - inventadas por Euler, 20
 - mais sobre, 6
 - os cuidados com o uso das, 4
- Números
 - amigos, 319
 - capicuas, 189
 - critérios de divisibilidade, 189
 - de Fermat, 320
 - de Mersenne, 317, 322
 - demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$, 221, 272, 273
 - inteiros, 5, 6, 111, 112
 - irracionais, 5, 230

- envolvendo funções trigonométricas, 235
- envolvendo logaritmo, 234
- naturais, 5, 10, 160, 169, 170, 184, 280, 281, 285, 286, 290, 325
- perfeitos, 316
- poligonais, 275
- primos, 151
- de Mersenne, 317
- fatoriais, 320
- gêmeos, 316
- Propriedade Fundamental dos – primos, 97
- racionais, 185
- reais
- apresentação axiomática dos, 140
- axioma de ordenação, 268
- axiomat. da adição de, 140, 260
- axiomatização da multiplicação de, 141, 261
- multiplicação de, 265
- propriedades de ordem dos, 269
- raiz quadrada de, 148
- subtração de, 265
- unicidade do elem. neutro da adição, 262
- unicidade do elem. neutro da multiplic., 262
- O problema das quatro cores, 307
- Papiro de Rhind, 230
- Paradoxos
- de Zeno, 10
- lógicos, 37
- Pascal, Blaise, 309
- Pi, 230
- como surgiu o símbolo de, 21
- curiosidades sobre, 14
- Pitagóricos, 15, 89, 221, 275, 316
- ternas, 158
- Pitágoras de Samos, 89, 91
- demonstrações do teorema de, 272, 276
- generalização do teorema de, 106
- teorema de, 79, 89, 98, 221
- Platão, 110, 236
- a famosa Academia de, 111
- Postulados, 133
- Premissas, 55, 68
- a verdade das, 68
- Princípio
- da contrapositividade, 252
- de Indução Finita, 279, 280
- da Não Contradição, 24
- do Terceiro Excluído, 24
- Problemas matemáticos
- dinheiro para quem resolver, 156, 321
- em aberto, 315
- Proposições (vide sentenças), 24
- Propriedade arquimediana dos números reais, 10
- Q.E.D., 180
- Quantificador
- cuidados com o uso, 28
- existencial, 5, 28
- negação de, 196, 198
- universal, 5, 28
- Recorde, Robert, 19
- Regras de inferência, 135, 169
- modus ponens*, 135

- particularização, 135, 262
- Segmentos comensuráveis, 221
- Sentenças, 24
 - abertas, 26
 - como usar a recíproca de, 83
 - compostas, 40
 - condicional na Lógica Formal, 50
 - condicional não válida, 60
 - condicional válida, 60
 - conjuntivas, 42
 - conjunção de, 41
 - contradições, 208
 - contrapositiva de, 252
 - correto uso da recíproca, 83
 - disjuntivas, 42
 - disjunção de, 41
 - equivalentes, 49, 80
 - implicação lógica de, 52
 - importância das – equivalentes, 82
 - método prático para negação de, 200
 - negação da condicional, 197
 - negação da conjunção, 195
 - negação da disjunção, 195
 - negação de, 193
 - negação dupla de, 198
 - recíproca de, 77
 - resumo da negação de, 198
 - simples, 40
 - tabela-verdade da equivalência de, 49
 - tautologias, 207
 - valor lógico de, 25
 - válidas e não válidas, 25
 - válidas por vacuidade, 160
- Silogismos, 57
 - aristotélicos, 57
- Simon, Laplace, 98
- Sistema dedutivo, 135
- Sofismas, 293
- Sócrates, 110, 293
- Tabelas-verdade, 47
 - da conjunção de sentenças, 48
 - da disjunção de sentenças, 48
 - da negação da disjunção e da conjunção, 195
 - leis do Cálculo Proposicional, 209
- Tales de Mileto, 137, 184
- Teodoro de Cirene, 236
- Teorema(s), 89, 92, 168
 - Fundamental da Aritmética, 151
 - a família dos, 108
 - corolário, 108
 - cujas hipóteses são sentenças conjuntivas, 213
 - cujas hipóteses são sentenças disjuntivas, 211
 - cujas teses são sentenças disjuntivas, 214
 - de existência, 111, 187
 - de existência e de unicidade, 111
 - de unicidade, 110
 - generalização de, 104
 - hipótese, 90, 168
 - lema, 108
 - proposição como sinônimo de, 108
 - recíproco, 102
 - tese, 90
- Viète, François, 14
- Wallis, John, 6, 13
- Wiles, Andrew, 311