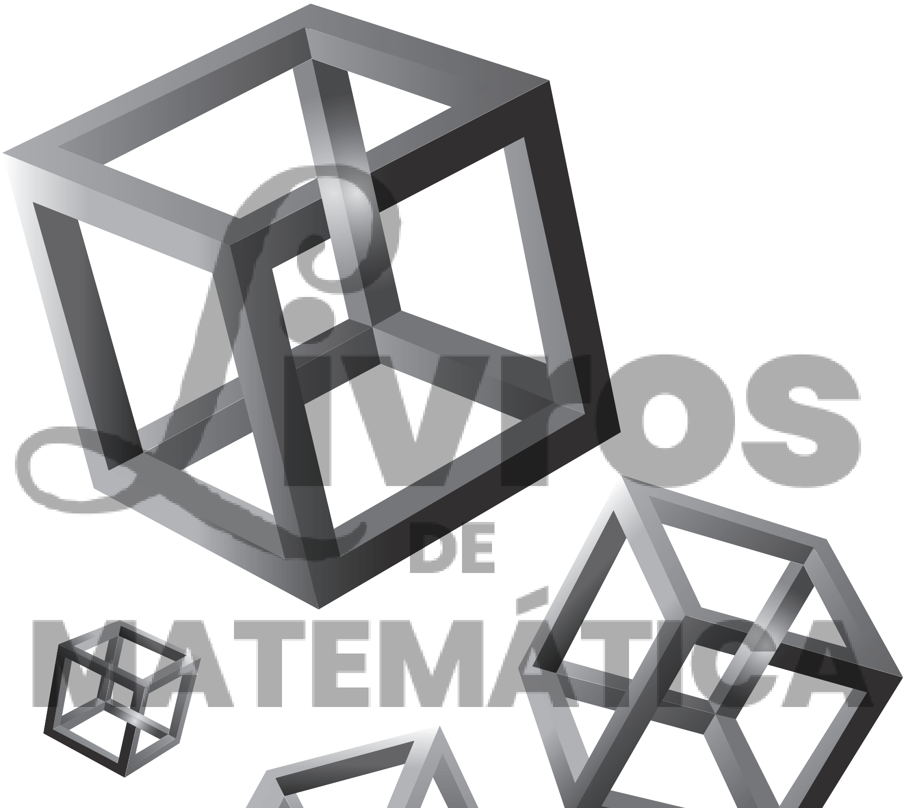
Um Convite à Matemática

com técnicas de demonstração e notas históricas

Daniel Cordeiro de Morais Filho



4ª edição
2024
Rio de Janeiro

SBM

COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Sumário

Prefácio

A ideia que nos fez escrever este livro foi a de preencher a lacuna de um texto que apresentasse os fundamentos básicos da Lógica Matemática, usando a própria Matemática. Visávamos um livro que pudesse ser usado por professores e alunos do Ensino Básico, particularmente, alunos envolvidos em olimpíadas de Matemática, estudantes dos cursos de Matemática e demais interessados.

É justamente quando precisam ou ingressam na universidade que a maioria de nossos alunos se chocam ao se deparar com o formalismo e a abstração que requerem algumas das primeiras disciplinas de Matemática. O choque decorre, principalmente, de carências na formação dos alunos, de seus professores e de um Ensino Médio que, na maioria das vezes, não lhes fornece um preparo adequado e nem lhes treina para usar o raciocínio lógico dedutivo que posteriormente lhes será cobrado. Juntam-se a esse danoso fato alguns livros didáticos que trazem erros conceituais, a exemplo de não distinguir definições de demonstrações, além de provar fatos matemáticos com exemplos, fazer mal uso de notações, dentre outros disparates.

No âmbito das universidades, ainda temos o fracasso de certas disciplinas introdutórias de Lógica e de Fundamentos da Matemática, que deixam de ensinar como a Matemática realmente funciona, acabam se tornando improdutivas e não conseguem corrigir falhas do raciocínio lógico dos alunos ([42]) nem lhes preparar adequadamente para o Magistério ou para disciplinas mais adiantadas.

É necessário despertar nos professores do Ensino Básico e em nossos jovens alunos o espírito crítico, o raciocínio correto e o cuidado com a linguagem, para que repassem esses conhecimentos às próximas gerações e possamos, com isso, melhorar o ensino nesse aspecto.

Nosso objetivo neste livro é que, em curto intervalo de tempo, os leitores possam compreender como a Matemática funciona, como as ideias da Matemática surgem e se desenvolvem; que possam, também, aprender as principais técnicas de demonstração e comecem desde cedo a dar atenção ao mínimo de rigor que a Matemática demanda, aprendendo a se comunicar com uma linguagem clara, precisa e fundamentada na Lógica. Cremos que, quanto mais cedo um estudante puder ter acesso a esses conhecimentos, mais facilmente aprenderá vários outros tópicos que irão aparecer ao longo de sua formação.

Tivemos a intenção de escrever o livro com uma linguagem cativante e leve. Trabalhamos com diversos casos reais de erros e dificuldades em relação ao ensino e à aprendizagem de Matemática, que alunos e professores encontram em livros didáticos e que enfrentam nas salas de aula e em seus cotidianos. Também objetivamos despertar a curiosidade dos leitores para vários tópicos que julgamos interessantes, tanto da Matemática como de sua história.

Para ler o livro, são necessários, basicamente, conhecimentos matemáticos do Ensino Básico, principalmente os da Teoria Elementar dos Números e os da Geometria Plana.

O texto destina-se a ser usado em disciplinas iniciais de Fundamentos de Matemática, de Lógica Matemática (elementar), de Resolução de problemas, em cursos de preparação para Olimpíadas de Matemática, de aperfeiçoamento para professores dos Ensino Fundamental e Médio e em outros cursos de natureza semelhante.

Aos leitores, ressaltamos os seguintes fatos:

- Para explicitar que estamos fazendo uma definição, as palavras que denominam um objeto serão grifadas em fonte negrito.

- As palavras estrangeiras estão escritas em itálico. Visando um melhor entendimento do texto, sentenças matemáticas e algumas palavras também estão em itálico.

- Para dar o mínimo de formalismo e manter nossa proposta, tivemos de explorar noções intuitivas que os leitores certamente possuíam de certos temas e, por vezes, fomos impelidos a fazer uma introdução ingênua de outros. Mas, no momento oportuno, esses temas foram devidamente formalizados e detalhados.

- Algumas referências, mesmo não citadas nos capítulos, são sugestões para consultas posteriores e constam na Referência Bibliográfica.
- Os exercícios se propõem contemplar os mais diversos casos em que possam se apresentar os temas estudados.
- Algumas citações usadas no começo dos capítulos foram tiradas do Mathematical Quotation Server, na página eletrônica

  http://math.furman.edu/~mwoodard/mquot.html

  (consultada em outubro de 2023) e traduzidas livremente para o Português pelo autor.

A leitura do artigo [55] talvez tenha sido uma de nossas primeiras motivações para escrever este livro. A Revista do Professor de Matemática (RPM) e a coleção [47], ambos editados pela Sociedade Brasileira de Matemática, foram, além de inspiração, razão de vários temas abordados ao longo do texto. Utilizamos a última referência como fonte para criar vários exercícios baseados em fatos reais, com o intuito de desenvolver o senso crítico dos leitores em relação aos livros didáticos e à maneira como esses livros abordam certos tópicos de Matemática.

Agradecemos aos seguintes colegas por sugestões e correções: Ângelo Roncalli, Antônio Brandão, Claudianor Oliveira Alves, Daniel Pellegrino, Francisco Júlio de Araújo Corrêa, Lúcio Guerra, Marcelo Martins dos Santos, José Iraponil Costa Lima, Samuel Duarte, Sinval Braga, Tomás Edson Barros, Vandik Estevam e Alan de Araújo Guimarães. Agradeço ao professor José Lindomberg Possiano Barreiro pela ajuda com o LaTeX e pela confecção das figuras. Agradeço ainda, profundamente, a um parecerista anônimo pela leitura técnica e por suas valiosas opiniões para melhorar o texto.

Sugestões para leitura e uso do livro:

1. A proposta é que se estude mais rapidamente os capítulos iniciais, objetivando chegar logo ao Capítulo 11, quando começa o estudo das demonstrações matemáticas.
2. Os capítulos, seções ou subseções marcados com um asterisco ($*$) podem ser suprimidas em uma primeira leitura, sem que se altere a proposta principal do livro. Esses tópicos podem ficar para leitura individual complementar

ou para serem apresentados pelos próprios alunos, como algum trabalho da disciplina na qual o livro esteja sendo usado. Essa sugestão não significa que esses tópicos não sejam importantes na formação dos alunos!

3. Os capítulos, seções ou subseções marcados com dois asteriscos $(**)$ abordam tópicos essencialmente de Lógica e podem também, com o devido cuidado, ser omitidos para um uso mais rápido do livro.

Contamos que nos enviem sugestões, nos apontem falhas e erros para que possamos melhorar nosso texto. Usem o endereço: demoraisfilho@gmail.com

Campina Grande, março do ano de 2012

Prefácio da quarta edição

Esta quarta edição foi revisada e atualizada. Também aproveitamos para fazer pequenas modificações.

Mais uma vez, agradecemos a acolhida que o livro tem entre nossos colegas, professores, alunos e interessados.

Fraterno abraço a todos.

Campina Grande, outubro do ano de 2023

Daniel Cordeiro de Morais Filho

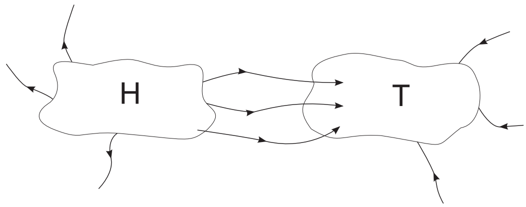


Figura 17.1: Em muitos casos, não se deve perder a tese T de vista para conseguir descobrir a demonstração. Se a demonstração for encarada como uma ponte ligando hipótese à tese, nada impede de usar a tese e raciocinar um pouco "de trás para frente" para tentar descobrir como construir essa ponte. Claro, poderá haver algumas tentativas infrutíferas, mas essa ponte deve ser construída. Não se deve desistir!

Vamos a um exemplo. Demonstremos o seguinte teorema

Teorema 17.1.1. *Se x e y são números reais positivos, então* $\sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2}$.

(Hipótese: x e y são números reais positivos

Tese: $\sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2}$)

Nesse teorema temos uma hipótese muito geral, x e y são números reais positivos, e desejamos deduzir uma desigualdade. Como fazer isso partindo apenas dessa hipótese? E agora?

Bem, nesse caso, a tese tem um papel muito importante na descoberta da demonstração. Vejamos.

Primeiramente, é claro que não se pode usar diretamente a tese em uma demonstração, pois é justamente ela que queremos deduzir. Mas sem perder a tese de vista, não poderíamos chegar a alguma expressão conhecida válida, e daí ir em sentido contrário e usar essa expressão para deduzir a tese?

Pois bem, examinando a tese temos:

$$\begin{aligned}
\sqrt{xy} \overset{?}{\leq} \frac{x+y}{2} \Rightarrow \left(\sqrt{xy}\right)^2 \overset{?}{\leq} \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 &\Rightarrow \\
\Rightarrow xy \overset{?}{\leq} \frac{x^2+2xy+y^2}{4} &\Rightarrow \\
\Rightarrow 4xy \overset{?}{\leq} x^2+2xy+y^2 &\Rightarrow \\
\Rightarrow 0 \leq x^2-2xy+y^2 \Rightarrow 0 &\overset{!}{\leq} (x-y)^2.
\end{aligned}$$

Usamos as interrogações em cima do símbolo de desigualdade, pois não sabemos se elas são válidas. Mas, observe que ao final deduzimos a expressão $(x-y)^2 \geq 0$, que sabemos ser verdadeira, pois o quadrado de qualquer número é não negativo.

Agora, será que os passos anteriores não podem ser revertidos, ou seja, as implicações anteriores valem em sentido contrário? Se valerem, como dessa vez estamos partindo de uma desigualdade válida, provaremos o que queremos.

De fato, as implicações valem em sentido contrário (nesse caso, no sentido direto também). Temos a

Demonstração do Teorema 17.1.1: Sejam x e y números reais. Como $(x-y)^2 \geq 0$, temos as implicações:

$$\begin{aligned}(x-y)^2 \geq 0 &\Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{x^2+2xy+y^2}{4} \geq xy \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geq xy.\end{aligned}$$

Como x e y são números positivos, temos $xy = \left(\sqrt{xy}\right)^2$ e da última desigualdade resulta

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geq \left(\sqrt{xy}\right)^2 \Rightarrow \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}. \text{ C.Q.D.}$$

Observações:

1. Não se pode usar a tese diretamente em uma demonstração! Não pode haver dúvidas sobre isso!

   Note que, informalmente, como em um rascunho, sem perder a tese de vista, apenas encontramos uma desigualdade válida, e voltando nas implicações a partir dessa desigualdade válida é que a tese foi deduzida.

2. Nesse método de demonstração, observe com o devido cuidado se realmente as implicações valem em sentido contrário.

19 Demonstrações usando a contrapositiva

"Euclides me ensinou que sem hipóteses não há qualquer demonstração. Portanto, em qualquer argumento, examine as hipóteses."

Eric Temple Bell (1883-1960)

In Return to Mathematical Circles, H. Eves,
Prindle, Weber & Schmidt, 1988.

19.1 A contrapositiva de uma sentença

Olhando mais atentamente a demonstração do Lema 16.2.1, naquela demonstração provamos a sentença *Se n é ímpar, então* n^2 *é ímpar* e, com argumentos da técnica da demonstração por redução a um absurdo, a usamos para provar o que queríamos: *Se* n^2 *é par, então n é par*.

Portanto, na verdade, escrevendo essas sentenças na forma implicativa, provamos naquela demonstração a seguinte implicação:

$$(n \text{ é ímpar} \Rightarrow n^2 \text{ é ímpar}) \Rightarrow (n^2 \text{ é par} \Rightarrow n \text{ é par}). \qquad (19.1)$$

Se chamarmos as proposições

$$H\colon n^2 \text{ é par} \quad \text{e} \quad T\colon n \text{ é par},$$

as negações dessas sentenças são, respectivamente,

$$\sim H\colon n^2 \text{ é ímpar} \quad \text{e} \quad \sim T\colon n \text{ é ímpar}.$$

Índice Remissivo